Low Pass Filter design Chebyshev

Table of Contents

1 Noodzakelijke gegevens voor een LPF Chebyshev

1) PassBandfrequentie in Hz of Rad bv. fp = 2/(2.π) kHz
2) StopBandfrequentie in Hz of Rad bv. fs = 4/(2.π) kHz
3) verzwakking bij PassBandfrequentie in dB bv.PB = 1 dB
4) Verzwakking bij StopBandfrequentie in dB bv. PS =33 dB
5) Versterkingsfactor voor PassBand bv. G >=-1dB

2 Voornaamste formules

1.1 De tranfer formule van Chebyshev

$$H_{C_N}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 {C_N}^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$$

Hierin is $C_N\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = cosh\left[N.cosh^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$ met N = order van het filter ($N = 0{,}1{,}2{,}3 \ldots N$)
En $C_N\,(x)$ is een Chebyshev polynomial dat als volgt eruit ziet naargelang de order (N) van het filter:

$C_0(x) = 1$
$C_1(x) = x$
$C_{(N+1)}(x) = 2..x.C_{(N)}(x) - C_{(N-1)}(x)$
Dus als we dit uitwerken bekomen we:
$C_2(x) = 2.x.x - 1 = 2.x^2 - 1$
$C_3(x) = (2.x^2 - 1).2.x - x = 4.x^3 - 3.x$
$C_4(x) = (4.x^3 - 3.x).2.x - (2.x^2 - 1) = 8.x^4 - 8.x^2 + 1$
$C_5(x) = (8.x^4 - 8.x^2 + 1).2.x - (4.x^3 - 3.x) = 16.x^5 - 20.x^3 + 5.x$
$C_6(x) = (16.x^5 - 20.x^3 + 5.x).2.x - (8.x^4 - 8.x^2 + 1) = 32.x^6 - 48.x^4 + 18.x^2 - 1$
Enz....

2.1 Demping in lineaire waarde

Als $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ dan zijn alle $C_N(x)$ gelijk aan *1* en op deze frekwentie is dus $H_{C_N}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ of $H_{C_N}(\omega)^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$ en nemen we het logaritme aan beide kanten van deze vergelijking dan wordt $2.10.\log(H_{C_N}(\omega)) = 10.\log(\frac{1}{1+\varepsilon^2})$ ofwel
$2.10.\log(H_{C_N}(\omega)) = -10.\log(1+\varepsilon^2)$
Nu is $2.10.\log(H_{C_N}(\omega))$ niets anders dan de demping in *dB* in de *PassBand* op de frequentie $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 1$ en dus $\frac{PB}{-10} = log(1+\varepsilon^2)$ en hieruit volgt dat $1+\varepsilon^2 = 10^{\frac{PB}{-10}}$ ofwel $\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{PB}{-10}} - 1}$
Vermits de verzwakking in de *PassBand* uitgedrukt wordt in *–dB* bekomen we dat

$\varepsilon = \sqrt{10^{(0.1.PB)} - 1}$
$\varepsilon = \sqrt{10^{(0.1.1)} - 1} = 0.508847$ (1)
Men ziet dat ε een lineare waarde heeft maar niet eenduidig de verzwakking aanduidt op $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 1$ maar wel $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ is de verzwakking, linear aangeduidt op het punt waar $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 1$.

2.2 Order van de filter

$$N = \frac{arccosh\sqrt{[(10^{0.1.PS} - 1)/(10^{0.1.PB} - 1)]}}{arccosh(fs/fp)}$$
Hierin is $arccosh(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
hierin is
$x_1 = \sqrt{(10^{0.1.PS} - 1)/(10^{0.1.PB} - 1)}$
En zo ook
$x_2 = fp/fs$

Dus
$$x_1 = \sqrt{\frac{(10^{0.1.33} - 1)}{(10^{0.1.1} - 1)}} = 87.76145$$
En

$$x_2 = \frac{2}{1} = 2$$

$$N = \frac{ln\left(x_1+\sqrt{x_1^2+1}\right)}{ln\left(x_2+\sqrt{x_2^2+1}\right)}$$

$$N = \frac{ln\left(87.761+\sqrt{87.761_1^2+1}\right)}{ln\left(2+\sqrt{2_2^2+1}\right)} = 3.579 \qquad (2)$$

Dus N=4

2.3 Stralen van de Chebyshev filter

Stel $\Gamma = \left(\frac{1+\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{N}}$

Ofwel $\Gamma = \left(\frac{1+\sqrt{1+0.508847^2}}{0.508847}\right)^{\frac{1}{4}} = 1.4290$

Dan is

$$d_1 = \frac{\Gamma^2 - 1}{2.\Gamma}$$

Of

$d_1 = \frac{1.4290^2-1}{2.1.4290}$=0.364625

$$d_2 = \frac{\Gamma^2 + 1}{2.\Gamma}$$

of

$$d_2 = \frac{1.4290^2 + 1}{2.1.4290} = 1.064402$$

2.4 Pool lokaties

$\varphi_m = \frac{\pi.(2.m+1)}{2.N}$ met m = 0,1, ...(N/2-1) als N even is

$\varphi_m = \frac{\pi.(2.m+1)}{2.N}$ met m = 0,1, ...((N-1)/2-1) als N oneven is

Voor N=4 wordt dit

$$\varphi_0 = \frac{\pi.(2.0+1)}{2.4} = \frac{\pi}{8} = 0.3927 \qquad (4a)$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi.(2.1+1)}{2.4} = \frac{3.\pi}{8} = 1.1781 \qquad (4b)$$

En de punten op de ellips zijn

$$\sigma_m + j.\omega_m = -d_1.cos(\varphi_m) \pm j.d_2.sin(\varphi_m)$$

$$\sigma_0 + j.\omega_0 = -0.364625.cos(0.3927) \pm j.1.064402.sin(0.3927)$$

$$\sigma_0 + j.\omega_0 = -0.33687 \pm j.0.407329 \qquad (5)$$

$$\sigma_1 + j.\omega_1 = 0.364625.cos(1.1781) \pm j.1.064402.sin(1.1781)$$

$$\sigma_1 + j.\omega_1 = -0.139536 \pm j.0.98338 \qquad (6)$$

3 Genormalizeerde overdracht functie

$$H_m = \frac{R}{(s+R)} \cdot \frac{\prod_m (B_{2m})}{\prod_m (s^2 + B_{1m}.s + B_{2m})}$$

Hierin is *m* nog steeds gelijk aan 0,1,....

$$H_0(s) = \frac{R}{s+R}$$

als N oneven is, is dit het eerste order filter
En de volgende tweede order sessies zijn

$$H_m(s) = \frac{B_{2m}}{(s^2+B_{1m}.s+B_{2m})}$$

Waarin $B_{1m} = -2.\sigma_m$
En $B_{2m} = \sigma^2 + \omega^2$

En dus voor N=4 bekomen we dus
Geen eerste order filter dus $H_0(s) = \frac{R}{s+R}$ bestaat niet
En

$$H_m(s) = \frac{B_{20}}{(s^2+B_{10}.s+B_{20})} \cdot \frac{B_{21}}{(s^2+B_{11}.s+B_{21})}$$

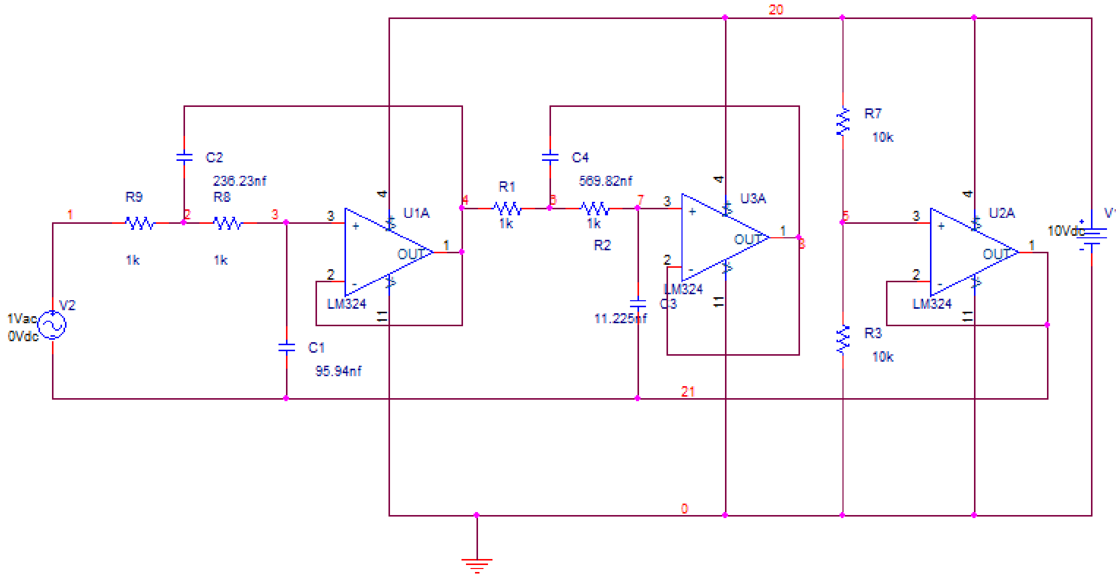
Met $B_{2m} = \sigma^2 + \omega^2$

Of $B_{20} = 0.336870^2 + 0.407329^2 = 0.27940$ (7)
En $B_{21} = 0.139536^2 + 0.983379^2 = 0.98650$
En $B_{10} = -2.\sigma_0 = 2.0.33687 = 0.67374$ (8a)
En $B_{11} = -2.\sigma_1 = 2.0.139536 = 0.279072$ (8b)

En dus $H_m(s) = \frac{0.27940}{(s^2+0.67374.s+0.27940)} \cdot \frac{0.98650}{(s^2+0.279072.s+0.98650)}$

3.1 Toegepast op Sallens&Key active filter circuit

Dit is identiek als bij de Butterworth filter en zou eigenlijk geen enkel probleem mogen zijn.



Figuur 1 Sallens&Key cicuit

Een Sallens&Key circuit heeft de volgende transfer functie, indien alle weerstanden gelijk aan 1 (genormalizeerd) genomen worden:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{C1.C2}}{s^2 + \frac{2.S}{C1} + \frac{1}{C1.C2}}$$

Hieruit volgt dat

$\frac{2}{C1} = B_{1m}$ of $\frac{2}{B_{1m}} = C1$

Dus $\frac{2}{0.67374} = C1_0$ of $2.9685 = C1_0$ (9)

Zo ook $\frac{2}{0.27907} = C1_1$ of $7.1666 = C1_1$ (10)

Hieruit volgt ook dat

$\frac{1}{C1.C2} = B_{2m}$ en dus $\frac{1}{C1.B_{2m}} = C2$ en met invullen van C1 en R volgt

$\frac{1}{2.9685.0.27940} = C2_0$ of $2 \cdot 0 \cdot= 1.2057$ (11)

Zoook $\frac{1}{7.1666\ .0.9865} = C2_1$ of $2 \cdot 1 \cdot= 0.14144$ (12)

4 Denormalizeren van de componenten

Als we kiezen dat R1 = R2 = 1000 Ohm of 1000 = K
Dan wordt R' = K.R
Zoook wordt C' = C/K.2.π.f met f de frequencie die we genormalizeerd hebben tot 1.

Dus wordt

$C1_0{}' = 2.9685/(1000.2.\pi.2000) = 236.23$ nF (13)

$C1_1{}' = 7.1606/(1000.2.\pi.2000) = 569.82$ nF (14)

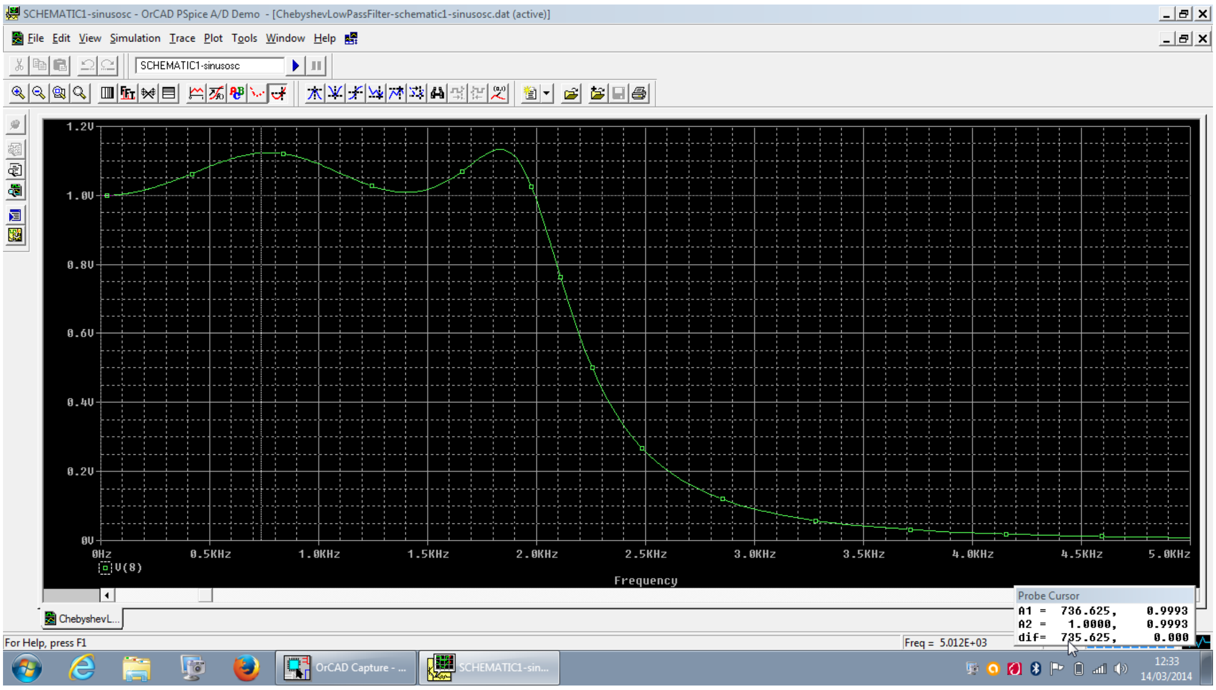
Op dezelfde manier wordt

$C2_0{}' = 1.2057/(1000.2.\pi.2000) = 95.94$ nF (15)

$C2_1{}' = 0.14144/(1000.2.\pi.2000) = 11.255$ nF (16)

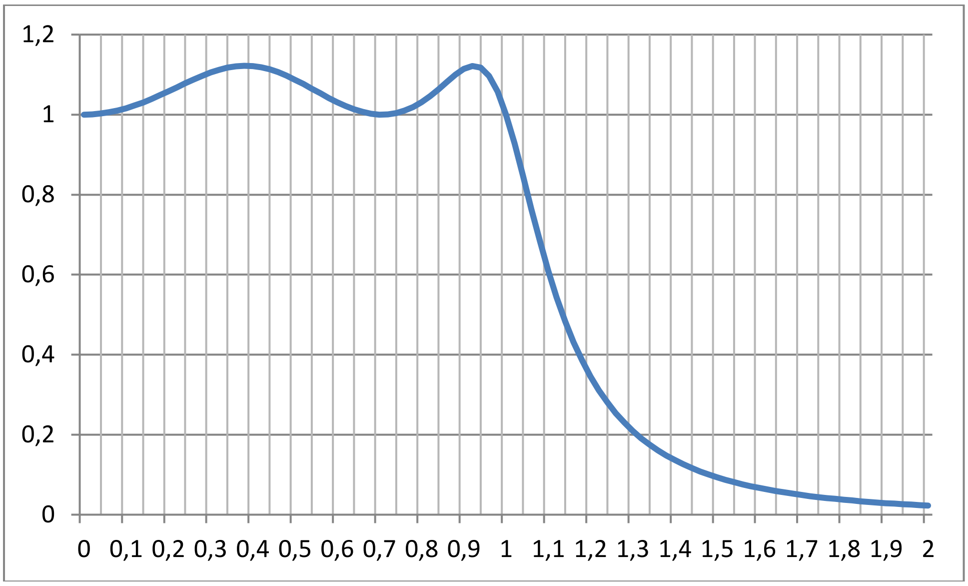
En dat zijn dan de uiteindelijke waarden die in het echte circuit moeten ingevuld worden, zoals te zien is in Figuur 1 Sallens&Key cicuit
En een simulatie uitslag is te zien in Figuur 2 simulatie Sallens&Key LPF.

Noteer dat door onze vrije keuze van R1 = R2 = 1000 Ohm of 1000 = K er in theorie oneindig vele oplossingen mogelijk zijn, en het is dan ook niet verwonderlijk dat men in de praktijk verschillende componenten waarden vindt die toch een oplossing zijn van hetzelfde vraagstuk.
Hij die alle details begrijpt, zal ook deze schijnbare tegenstrijdigheid begrijpen. Alleen op school krijgt men eenduidige vraagstukken die maar één oplossing hebben maar in de werkelijkheid komen we meestal vele verschillende oplossingen tegen voor hetzelfde vraagstuk.



Figuur 2 simulatie Sallens&Key LPF

Een uitrekenen van de transfer formule in een EXEL file is afgebeeld in Figuur 3 EXEL sheet



Figuur 3 EXEL sheet

5 Details over de gevonden formules

5.1 Enkele algemene regels uit de wiskunde

5.1.1 De inverse functies

Als $sin(x) = A$ dan is $x = sin^{-1}(A)$, dit wordt ook geschreven als $x = arcsin(A)$
Zoook is als $cosh(x) = A$ dan is $x = cosh^{-1}$(A), dit wordt ook geschreven als $x = arccosh(A)$.

5.1.2 De log en ln functies

Als $log(x) = A$ en $\log(b) = B$ dan is $log(a) - log(b) = log\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{A}{B}$. Dit is waar voor gelijk welk logaritme met gelijk welk grondgetal.

Als Als $log(x) = A$ dan is $x = 10^A$
Maar ook $log(x^2) = 2.log(x)$

Probeer dit uit met verschillende voorbeelden want deze formules worden veelvuldig in dit dokument gebruikt.

5.2 De formule $cosh^{-1}(x)$ of ook $arccosh(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

Dit volgt uit de definitie van $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en stellen we dit gelijk aan y (1)
Noteer dat als $\cosh(x) = y$ dan is $(x) = arcosh(y)$
En uit de definitie van $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ en stellen we dit gelijk aan z (2)

Noteer dat als $\sinh(\mathrm{x}) = z$ dan is $(\mathrm{x}) = arsinh(z)$

Hieruit volgt als we (1) + (2) wordt opgeteld dat $\cosh(\mathrm{x}) + \sinh(\mathrm{x}) = e^x$ (3)
Ook weten we uit de analytische meetkunde dat $\cosh^2(\mathrm{x}) - \sinh^2(\mathrm{x}) = 1$ hieruit halen we dat $\sinh(\mathrm{x}) = 1 \cdot$ (4)
En dus wordt (3) $\cosh(\mathrm{x}) + \sqrt{\cosh^2(\mathrm{x}) - 1} = e^x$ of mits invulling van de gelijkstelling van $\cosh(\mathrm{x}) = y$ bekomen we $y + \sqrt{y^2 - 1} = e^x$
Men kan hieruit eenvoudig de inverse functie uit afleiden of
$x = ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ als $\cosh(\mathrm{x}) = y$ en vermits $(\mathrm{x}) = arcosh(y)$ volgt dat
$\operatorname{arccosh}(x) = ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$

Op analoge manier vindt men dat
$x = ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$ als $\sinh(\mathrm{x}) = z$
Conclusie is dus dat
$arccosh(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ en $arcsinh(x) = ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ en dit is wel uit te rekenen op een rekenmachientje.

5.3 De formule $N = \dfrac{arccosh\sqrt{[(10^{0.1.PS} - 1)/(10^{0.1.PB} - 1)]}}{arccosh(fs/fp)}$

Starten we terug van de algemene formule
$H_{C_N}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 {C_N}^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}}$ en vullen we hierin de polynomial $C_N\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = cosh\left[N.cosh^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$ in dan is voor een willekeurige verhouding van $\frac{\omega}{\omega_0}$ de formule ook nog geldig of als $\omega = \omega_p$ dan bekomen we een uitdrukking van de verzwakking op het punt waar $\omega = \omega_p$ en noemen we dit punt ·, verzwakking (Attenuation) in de doorlaatband (Passband) uitgedrukt in *dB*. Dit betekent dat
$H_{C_N}(\omega_p) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 {C_N}^2\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)}}$ en vullen we $C_N = cosh\left[N.cosh^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$ in en kwadrateren we beide delen van de vergelijking dan wordt ${H_{C_N}}^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 {C_N}^2\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)}$. En nemen we het logaritme van deze vergelijking, en vermenigvuldigen beide kanten met 10 dan bekomen we:
$2.10.log\left(H_{C_N}\right) = -10.log\left[1 + \varepsilon^2 {C_N}^2\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)\right]$ Hierin zien we dat $2.10.log\left(H_{C_N}\right) = A_p$.
En dus $A_p = -10.log\left[1 + \varepsilon^2 {C_N}^2\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)\right]$
Nemen hiervan de inverse logaritme van dan bekomen we dat
$10^{\frac{A_p}{-10}} = \left[1 + \varepsilon^2 {C_N}^2\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)\right]$ en dus $10^{\frac{A_p}{-10}} - 1 = \varepsilon^2 {C_N}^2\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)$ en de wortel hiervan is dan
$\sqrt{10^{\frac{A_p}{-10}} - 1} = \varepsilon.C_N\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)$
En nemen we terug het logaritme van beide kanten van de vergelijking dan is
$log\sqrt{\left(10^{\frac{A_p}{-10}} - 1\right)} = log\left(\varepsilon.C_N\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)\right)$ en vullen we hieri n de definitie van

$C_N = cosh\left[N.cosh^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$ dan bekomen we eindelijk

$$log\sqrt{\left(10^{\frac{A_p}{-10}}-1\right)} = log\left(\varepsilon.cosh\left[N.cosh^{-1}\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)\right]\right) \qquad (1)$$

Op analoge wijze bekomen we voor de verzwakking op het punt waar $\omega = \omega_s$ en noemen we dit punt A_s de verzwakking in de stopband dan is

$$log\sqrt{\left(10^{\frac{A_s}{-10}}-1\right)} = log\left(\varepsilon.cosh\left[N.cosh^{-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)\right]\right) \qquad (2)$$

Delen we nu **(2)/(1)** en we maken hierbij ook gebruik van de algemene formules zoals in het begin van dit hoofdstuk aangehaald dan is

$$\frac{log\sqrt{\left(10^{\frac{A_s}{-10}}-1\right)}=log\left(\varepsilon.cosh\left[N.cosh^{-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)\right]\right)}{log\sqrt{\left(10^{\frac{A_p}{-10}}-1\right)}=log\left(\varepsilon.cosh\left[N.cosh^{-1}\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)\right]\right)}$$ en dit is dan gelijk aan

$$log\sqrt{\frac{\left(10^{\frac{A_s}{-10}}-1\right)}{\left(10^{\frac{A_s}{-10}}-1\right)}} = log\left\{cosh\left[N.cosh^{-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)\right]\right\}$$. Hieruit volgt natuurlijk dat

$$\sqrt{\frac{\left(10^{\frac{A_s}{-10}}-1\right)}{\left(10^{\frac{A_p}{-10}}-1\right)}} = cosh\left[N.cosh^{-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)\right]$$ en daaruit volgt dat $cosh^{-1}\left[\sqrt{\frac{\left(10^{\frac{A_s}{-10}}-1\right)}{\left(10^{\frac{A_p}{-10}}-1\right)}}\right] = \left[N.cosh^{-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)\right]$

En uiteindelijk

$$N = \frac{cosh^{-1}\sqrt{\frac{\left(10^{\frac{A_s}{-10}}-1\right)}{\left(10^{\frac{A_p}{-10}}-1\right)}}}{cosh^{-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)}$$ en dat is dan de formule om het order van een Chebyschev filter uit te rekenen.

Noteer dat A_p en A_s in dB worden uitgedrukt, en vermits het verzwakkingen zijn is dit steeds een negatief getal.

Jan Spaenjers